

湛江雅托培训中心 2024 年考研数学 (二) 全真模拟试题第四章多元函数微积分学

一、选择题 (1—10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列媒体给出的四个选项中, 只有一个选项是最符合题目要求的。)

1 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处取得极大值, 则()。

- A. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数小于零
- B. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数大于零
- C. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数等于零
- D. $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处导数不存在

2 设 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$, 则 $f(x, y)$ 在点 $P(\frac{1}{2}, -1)$ 处()。

- A. 取得极小值 $-\frac{e}{2}$
- B. 取得极大值 $-\frac{e}{2}$
- C. 取得极大值 e
- D. 不取得极值

3 设 $f(x, y) = \frac{e^x}{x - y}$, 则()。

- A. $f'_x + f'_y = 0$
- B. $f'_x - f'_y = 0$
- C. $f'_x - f'_y = f$
- D. $f'_x + f'_y = f$

4 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{e^{x^2+y^2} - 1} = 1$, 则()。

- A. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值
- B. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极大值
- C. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不取得极值
- D. 不能确定 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极值

5 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{|x| + y^4} = -1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处()。

- A. 取得极小值
- B. 取得极大值
- C. 不取得极值
- D. 无法确定是否取得极值

6 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$

处()。

- A. 连续但不可微
- B. 偏导数存在但不连续
- C. 可微
- D. 连续但偏导数不存在

7 设 $f(x, y)$ 可微, 对任意的 x, y , 有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使得 $f(x_1, y_1) <$

$f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是()。

- A. $x_1 < x_2, y_1 > y_2$
- B. $x_1 > x_2, y_1 > y_2$
- C. $x_1 < x_2, y_1 < y_2$
- D. $x_1 > x_2, y_1 < y_2$

湛江雅托培训中心 2024 年考研数学 (二) 全真模拟试题第四章多元函数微积分学

8 设 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) > 0, F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 则由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 在 $x = x_0$ 处().

- A. 取得极小值
B. 取得极大值
C. 不取得极值
D. 不能确定是否取得极值

9 下列()选项条件成立时, 能够推出函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 且全微分 $df(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = 0$.

- A. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
B. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$
C. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = \frac{\sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$
D. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量 $\Delta f = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

10 方程 $xy - z \ln y + e^x = 1$, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程().

- A. 可确定隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$
B. 可确定隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$
C. 可确定隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$
D. 只能确定隐函数 $z = z(x, y)$

二、填空题 (11-16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。)

11. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + \ln z - \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$ 确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

12. 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

13. 设 $\frac{(x+ky)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则 $k =$ _____.

14. 设 $z = z(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $z(x, 0) = 1, z'_y(x, 0) = x$, 则 $z(x, y) =$ _____.

15. 设 $z = z(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = x + y$, 且 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$, 则 $z(x, y) =$ _____.

16. 设 $z = \frac{2x}{x^2 - y^2}$, 则 $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} \Big|_{(2,1)} =$ _____.

三、解答题 (17—22 小题, 共 70 分, 解答写出文字说明、证明过程或演算步骤。)

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\varphi(0, 0) = 0$.

(1) 求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$;

(2) 证明: $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 并求全微分 $df \Big|_{(0,0)}$.

18. (本题满分 12 分)

求 $f(x,y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

19. (本题满分 12 分)

设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, $f(0, 0) = 0$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 + k (k \text{ 为常数}).$$

证明:

- (1) 当 $k \neq -1$ 时, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微;
- (2) 当 $k = -1$ 时, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微.

20. (本题满分 12 分)

设 $x = x(y), z = z(y)$ 由方程组 $\begin{cases} F(y-x, y-z) = 0, \\ G\left(xy, \frac{z}{y}\right) = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dx}{dy}, \frac{dz}{dy}$.

21. (本题满分 12 分)

设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \text{ 讨论:}$$

(1) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微?

(2) 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

22. (本题满分 12 分)

根据以下的要求求极值和证明

(1) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定, 求 $z = z(x, y)$ 的极值.

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 证明: $z = f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的充分条件是 $f''(0) > 0$ 且 $f(0) > 1$.