

# 湛江雅托培训中心 2024 年考研数学 (二) 全真模拟试题第第三章一元函数积分学

一、选择题 (1—10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列媒体给出的四个选项中, 只有一个选项是最符合题目要求的。)

1. 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$ , 则正确的是 ( )。

- A.  $F(x)$  为正的常数                      B.  $F(x)$  为负的常数  
C.  $F(x)$  不是常数                      D.  $F(x)$  恒为零

**解** 由于  $e^{\sin t} \sin t$  是以  $2\pi$  为周期的周期函数, 所以

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d(\cos t) \\ &= - e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \cdot e^{\sin t} \cdot \cos t dt \\ &= -(1-1) + \int_0^{2\pi} \cos^2 t e^{\sin t} dt, \end{aligned}$$

又因为  $\cos^2 t \geq 0, e^{\sin t} > 0$ , 所以  $\cos^2 t e^{\sin t} \geq 0$ , 故  $F(x) > 0$ , A 正确。

**【注】** 设  $f(x+T) = f(x)$ , 且  $f(x)$  连续, 则对任意  $a \in \mathbf{R}$ , 有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

2. 设  $\delta > 0$ , 在  $(-\delta, \delta)$  内有  $|f(x)| \leq x^2, f''(x) > 0, I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$ , 则 ( )。

- A.  $I = 0$                       B.  $I > 0$                       C.  $I < 0$                       D. 不能确定

由  $|f(x)| \leq x^2$ , 知  $f(0) = 0$ , 且

$$0 \leq |f'(0)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0,$$

故  $f'(0) = 0$ . 由  $f''(x) > 0$ , 知  $f'(x)$  单调增加, 故在区间  $(-\delta, 0)$  和  $(0, \delta)$  内分别有  $f'(x) < 0$  和  $f'(x) > 0$ .

因而  $f(x)$  在  $(-\delta, 0)$  内单调减少, 在  $(0, \delta)$  内单调增加, 又  $f(0) = 0$ , 知  $f(x)$  在  $(-\delta, \delta)$  内非负, 且仅在  $x = 0$  处  $f(x) = 0$ , 所以  $I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx > 0$ , 故 B 正确。

3. 设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$ , 则 ( )。

- A.  $I_1 < 1 < I_2$                       B.  $I_2 < 1 < I_1$                       C.  $1 < I_1 < I_2$                       D.  $I_1 < I_2 < 1$

**解** 因为  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以在该区间上  $\sin x$  单调增加,  $\cos x$  单调减少, 而  $\sin x \leq x$ ,

故当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时, 有  $\sin(\sin x) < \sin x, \cos(\sin x) > \cos x$ , 故

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

综上所述,  $I_1 < 1 < I_2$ , A 正确。

4. 设  $f(x)$  二阶可导, 则下列结论正确的是 ( )。

- ① 当  $f'(x) < 0$  时, 则  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx < 0$ ; ③ 当  $f''(x) > 0$  时, 则  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx > 0$ ;  
 ② 当  $f'(x) < 0$  时, 则  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx > 0$ ; ④ 当  $f''(x) > 0$  时, 则  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx < 0$ .  
 A. ②③                      B. ①②                      C. ②④                      D. ①④

**解** 依题意, 只需判别被积函数的正、负即可, 考虑到  $\sin x$  在  $[0, \pi]$  与  $[-\pi, 0]$  上分别非负和非正, 有  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_{-\pi}^0 f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$ . 而

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin x dx & \stackrel{x=-u}{=} \int_{\pi}^0 f(-u) \sin(-u) (-du) \\ & = -\int_0^{\pi} f(-u) \sin u du = -\int_0^{\pi} f(-x) \sin x dx, \end{aligned}$$

故 
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} [f(x) - f(-x)] \sin x dx.$$

由  $f'(x) < 0$ , 知  $f(x)$  单调减少, 故当  $x \in [0, \pi]$  时, 有  $f(x) \leq f(-x)$ , 于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} [f(x) - f(-x)] \sin x dx < 0,$$

故 ① 正确. 又

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx & = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d(\sin x) = f(x) \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin x dx \\ & = -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin x dx, \end{aligned}$$

且由  $f''(x) > 0$ , 知  $f'(x)$  单调增加, 从而  $-f'(x)$  单调减少. 由 ① 正确, 知

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = -\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin x dx < 0,$$

故 ④ 正确, 从而 D 正确.

**【注】** 作为选择题, 可用取特殊值法, 如对 ①② 取  $f(x) = -x$ , 对 ①④ 取  $f(x) = e^x$ .

5. 设反常积分  $\int_1^{+\infty} x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}) dx$  收敛, 则正确的是 ( ).

- A.  $k > -1$                       B.  $k < -1$                       C.  $k > 1$                       D.  $k < 1$

**解** 
$$e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1} = e^{-1} (e^{-\cos \frac{1}{x} + 1} - 1).$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $e^{-1} (e^{-\cos \frac{1}{x} + 1} - 1)$  与  $e^{-1} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$  是等价无穷小, 又  $1 - \cos \frac{1}{x}$  与  $\frac{1}{2x^2}$  是等价无穷小, 则  $x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1})$  与  $\frac{1}{2ex^{2-k}}$  是等价无穷小.

当  $k < 1$  时,  $2 - k > 1$ , 故  $\int_1^{+\infty} x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}) dx$  收敛;

当  $k \geq 1$  时,  $2 - k \leq 1$ ,  $\frac{1}{2ex^{2-k}}$  是阶数不高于  $\frac{1}{x}$  的无穷小, 故  $\int_1^{+\infty} x^k (e^{-\cos \frac{1}{x}} - e^{-1}) dx$  发散.

**【注】** 结论:  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx (a > 0, p \text{ 为任意实数})$ , 当  $p \leq 1$  时, 发散; 当  $p > 1$  时, 收敛于

$$\frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

6. 设连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(2a-x)$  ( $a \neq 0$ ),  $b$  为常数, 则  $I = \int_{-b}^b f(a-x) dx = ( \quad )$ .

A.  $2 \int_0^b f(2a-x) dx$

B.  $2 \int_{-b}^b f(2a-x) dx$

C.  $2 \int_0^b f(a-x) dx$

D. 0

**解**  $\int_{-b}^b f(a-x) dx = \int_{-b}^0 f(a-x) dx + \int_0^b f(a-x) dx.$

由  $f(x) = f(2a-x)$ , 得  $f(a+x) = f(a-x)$ , 则

$$\int_{-b}^0 f(a-x) dx \xrightarrow{x=-t} \int_b^0 f(a+t) dt = \int_0^b f(a-t) dt = \int_0^b f(a-x) dx,$$

故  $\int_{-b}^b f(a-x) dx = 2 \int_0^b f(a-x) dx$ . C 正确.

7. 设  $\varphi(x) = \frac{x^2}{x-1} \int_1^x f(t) dt$ ,  $f(x)$  为连续函数, 则  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = ( \quad )$ .

A. 1

B.  $f(1)$

C. 0

D. 不存在

**解**  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \int_1^x f(t) dt}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \int_1^x f(t) dt + x^2 f(x)}{1} = f(1).$

选 B

8. 设  $f(x)$  有连续导数,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 6$ ,  $\alpha(x) = \int_0^{x^3} f(t) dt$ ,  $\beta(x) = \left[ \int_0^x f(t) dt \right]^3$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是 ( ).

A. 同阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 高阶无穷小

D. 低阶无穷小

**解** 令  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则  $g(x^3) = \int_0^{x^3} f(t) dt$ ,  $g'(x) = f(x)$ ,  $g''(x) = f'(x)$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{f'(0)}{2} = 3,$$

即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{3x^2} = 1$ , 所以  $g(x) \sim 3x^2$ ,  $g(x^3) \sim 3(x^3)^2 = 3x^6$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^6}{(3x^2)^3} = \frac{1}{9}.$$

选 A

9. 设  $I = \frac{1}{s} \int_0^s f\left(t + \frac{x}{s}\right) dx$ ,  $s > 0$ ,  $t > 0$ , 则正确的是 ( ).

A.  $I$  仅依赖于  $s$

B.  $I$  仅依赖于  $t$

C.  $I$  依赖于  $s, t$

D.  $I$  依赖于  $s, t, x$

**解** 令  $t + \frac{x}{s} = u$ , 则  $du = \frac{1}{s} dx$ , 故

$$I = \frac{1}{s} \int_0^s f\left(t + \frac{x}{s}\right) dx = \frac{1}{s} \int_t^{2t} f(u) s du = \int_t^{2t} f(u) du.$$

选 B

10. 设积分  $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  ( $p > 0, q > 0$ ) 收敛, 则 ( ).

A.  $p > 1$  且  $q < 1$ .

B.  $p > 1$  且  $q > 1$

C.  $p < 1$  且  $q < 1$

D.  $p < 1$  且  $q > 1$

解

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int_1^e \frac{dx}{x^p \ln^q x} + \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

由于  $\ln x = \ln[1 + (x-1)] \sim x-1 (x \rightarrow 1)$ , 故由

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x^p \ln^q x}}{\frac{1}{(x-1)^q}} = 1,$$

可知  $\int_1^e \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  与  $\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^q}$  敛散性相同, 故当  $q < 1$  时,  $\int_1^e \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  收敛.

当  $q < 1, p = 1$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} = \frac{1}{1-q} \ln^{1-q} x \Big|_e^{+\infty} = \infty$ , 故发散;

当  $q < 1, p < 1$  时,  $\forall p < a < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p \ln^q x}{\frac{1}{x^a}} = +\infty$ , 且  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$  发散, 故  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  发散;

当  $q < 1, p > 1$  时,  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} < \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ , 故  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$  收敛.

综上所述, 当  $p > 1, q < 1$  时, 积分收敛, A 正确.

## 二、填空题 (11-16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。)

11.  $f(x) = \max\{1, x^2\}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内满足  $F(0) = 1$  的一个原函数为\_\_\_\_\_.

$$\text{答案 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}, & x > 1. \end{cases}$$

解

$$f(x) = \max\{1, x^2\} = \begin{cases} x^2, & x < -1 \text{ 或 } x > 1, \\ 1, & |x| \leq 1, \end{cases}$$

积分, 得

$$F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & x < -1, \\ x + C_2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

令  $x = 0$ , 则由  $F(0) = 1$ , 知  $C_2 = 1$ , 故当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $F(x) = x + 1$ .

又因为原函数  $F(x)$  处处可导, 所以  $F(x)$  连续, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} F(x) = F(-1), \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1), \end{aligned}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -\frac{1}{3} + C_1 = -1 + 1 = 0, \\ \frac{1}{3} + C_3 = 1 + 1, \end{cases} \quad \text{解得 } C_1 = \frac{1}{3}, C_3 = \frac{5}{3}, \text{ 故}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}, & x < -1, \\ x + 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}, & x > 1. \end{cases}$$

12. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 若  $x_0 \in [a, b], x \in [a, b]$ , 则极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x [f(t + \Delta x) - f(t)] dt = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $f(x) - f(x_0)$ .

**解** 由于  $\int_{x_0}^x f(t + \Delta x) dt \xrightarrow{t + \Delta x = u} \int_{x_0 + \Delta x}^{x + \Delta x} f(u) du$ , 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x [f(t + \Delta x) - f(t)] dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0 + \Delta x}^{x + \Delta x} f(u) du - \int_{x_0}^x f(t) dt}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow[\text{洛必达}]{\text{法则}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)] = f(x) - f(x_0).$$

**【注】** ①  $\int_{x_0}^x f(t) dt$  不含  $\Delta x$ , 对  $\Delta x \rightarrow 0$  的极限而言为常数.

$$\begin{aligned} \text{②} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x [f(t + \Delta x) - f(t)] dt &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0}^x \frac{f(t + \Delta x) - f(t)}{\Delta x} dt \\ &= \int_{x_0}^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta x) - f(t)}{\Delta x} dt = \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0), \end{aligned}$$

以上解法是错误的, 一般情况下, 积分号与极限号不能任意交换.

13. 由曲线  $y = x(x-1)(2-x)$  与  $x$  轴围成的平面图形的面积  $A = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $\frac{1}{2}$ .

**解** 曲线与  $x$  轴的交点为  $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ , 在区间  $[0, 1]$  上,  $y < 0$ ; 在区间  $[1, 2]$  上,  $y > 0$ , 故所求面积为

$$A = -\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

14. 双纽线  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  围成的平面图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

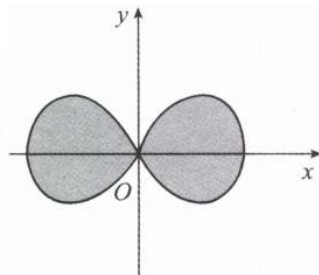
答案 1

**解** 双纽线的极坐标方程为

$$r^2 = \cos 2\theta \left( -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4} \right).$$

如图 3-10 所示, 由对称性, 知面积  $A$  为

$$A = 4 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 1.$$



15. 已知  $f'(e^x) = xe^{-x}$ , 且  $f(1) = 0$ , 则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

答案  $\frac{(\ln x)^2}{2}$ .

解 令  $e^x = t$ , 则  $x = \ln t, f'(t) = \frac{\ln t}{t}$ , 故

$$f(t) = \int f'(t) dt = \int \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln t)^2 + C.$$

由  $f(1) = 0$ , 得  $C = 0$ , 故  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$ .

16. 已知  $f'(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(0) = 0$ , 则  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

答案  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}(\cos x - 1), & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0. \end{cases}$

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \sqrt{2} \int |\sin x| dx \\ &= \begin{cases} -\sqrt{2} \cos x + C_1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2} \cos x + C_2, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由原函数的可导性, 可知  $f(x)$  在  $x = 0$  处必连续, 所以

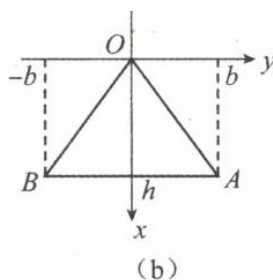
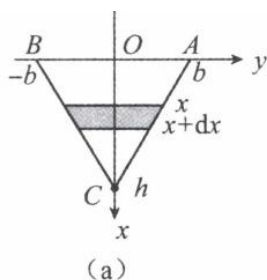
$$f(0) = 0 = -\sqrt{2} + C_1 = \sqrt{2} + C_2,$$

$$\text{解得 } C_1 = \sqrt{2}, C_2 = -\sqrt{2}, \text{ 故 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{2}(\cos x - 1), & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0. \end{cases}$$

三、解答题（17—22 小题，共 70 分，解答写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17. (本题满分 10 分)

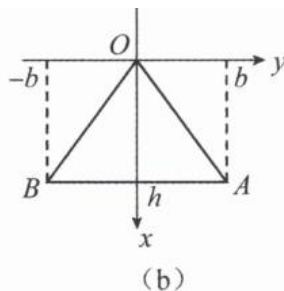
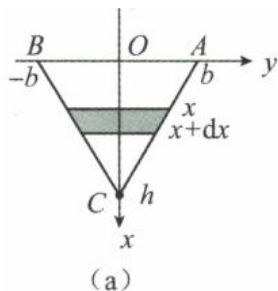
设如图 (a), (b) 所示为同一等腰三角形薄板, 已知其底为  $2b$ 、高为  $h$ , 将其垂直放入静水中, 图 (a) 是其底与水面相齐, 图 (b) 是其顶点与水面相齐, 设图 (a) 与图 (b) 薄板一侧所受压力分别为  $P_1$  和  $P_2$ , 求  $\frac{P_2}{P_1}$ .



解 如图 (a) 中直线 AC 的方程为  $y = \frac{b(h-x)}{h}$ . 用微元法, 任取

$[x, x+dx] \subset [0, h]$ , 则  $dP_1 = 2\rho gxy dx = \frac{2\rho gb}{h}(h-x)x dx$ , 故

$$P_1 = \int_0^h dP_1 = \int_0^h \frac{2\rho gb}{h}(h-x)x dx = \frac{1}{3}\rho gbh^2.$$



如图(b)中直线OA方程为  $y = \frac{bx}{h}$ , 则  $dP_2 = 2\rho gxydx = \frac{2\rho gb}{h}x^2dx$ , 故

$$P_2 = \int_0^h dP_2 = \int_0^h \rho g \frac{2b}{h} x^2 dx = \frac{2}{3} \rho g b h^2.$$

所以  $\frac{P_2}{P_1} = 2$ , 即  $P_2 = 2P_1$ .

18. (本题满分 12 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f''(x) > 0$ , 证明:

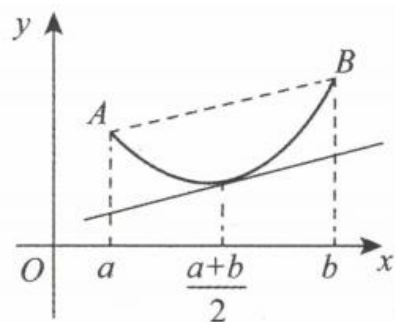
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

证 由已知,  $y = f(x)$  的图形如图所示.

在点  $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$  处切线方程为

$$y = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

曲线的切线在曲线的下方, 故  $f(x) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ . 对上式两端分别积分, 得



$$\int_a^b f(x) dx > f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + 0,$$

即  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . 又 AB 直线段在曲线  $y = f(x)$  上方, 故

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

对上式两端分别积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx < f(a)(b-a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a),$$

$$\text{即 } \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

综上所述, 所证不等式成立.

19. (本题满分 12 分)

设曲线  $y = f(x)$  上任一点  $(x, f(x))$  处的切线斜率为  $a^2x^2 - 4ax + 3$ , 且  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处取得极小值 0.

(1) 求  $f(x)$  及  $f(x)$  的其它极值;

(2) 证明:  $0 \leq \int_0^1 \sqrt{f(ut)} dt \leq \frac{2}{3u}, u \in (0, 1)$ .

解 (1) 由已知  $f'(1) = 0$ , 即  $(a^2 x^2 - 4ax + 3) \Big|_{x=1} = a^2 - 4a + 3 = 0$ , 解得  $a = 3, a = 1$ . 又

$$f''(x) = 2a^2 x - 4a, \quad f''(1) = 2a^2 - 4a,$$

当  $a = 3$  时,  $f''(1) = 6 > 0$ ; 当  $a = 1$  时,  $f''(1) = -2 < 0$ .

由已知  $f(1) = 0$  为极小值, 故  $a = 3$ , 所以  $f'(x) = 9x^2 - 12x + 3$ , 于是

$$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t) dt = 0 + \int_1^x (9t^2 - 12t + 3) dt = 3x^3 - 6x^2 + 3x.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $f(x)$  的另一个驻点为  $x = \frac{1}{3}$ , 且  $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 < 0$ , 所以  $f(x)$  的极大值为  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$ .

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^1 \sqrt{f(ut)} dt & \stackrel{\substack{ut=x \\ t=\frac{1}{u}x}}{=} \int_0^u \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{u} dx = \frac{1}{u} \int_0^u \sqrt{f(x)} dx \\ & \leq \frac{1}{u} \int_0^1 \sqrt{f(x)} dx \leq \frac{1}{u} \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{9}} dx = \frac{2}{3u}, u \in (0, 1), \end{aligned}$$

又显然有  $\int_0^1 \sqrt{f(ut)} dt \geq 0$ , 故原不等式成立.

20. (本题满分 12 分)

设  $f(x) = x^n \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$  与  $y = 0$  所围平面区域的面积为  $S_n, g(x) = \sin^{\frac{n}{2}} x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  与  $y = 0$  所围平面区域绕  $x$  轴旋转一周所得体积为  $V_n (n = 1, 2, \dots)$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi S_n}{V_n}$ .

解 由已知,

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{\frac{n}{2}} x\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \\ \pi S_n &= \pi \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = V_n - V_{n+2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad V_{n+2} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t d(\cos t) \\ &= -\pi \left[ \cos t \cdot \sin^{n+1} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (n+1) \sin^n t \cdot \cos t dt \right] \\ &= \pi(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot (1 - \sin^2 t) dt = (n+1)V_n - (n+1)V_{n+2}, \end{aligned}$$

整理得  $V_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} V_n$ , 所以

$$\pi S_n = V_n - V_{n+2} = V_n - \frac{n+1}{n+2} V_n = \frac{1}{n+2} V_n,$$

$$\text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi S_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

## 21. (本题满分 12 分)

设  $y = f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上非负连续, 曲边梯形

$$D(t) = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

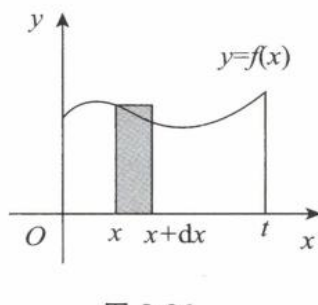
$D(t)$  所围图形的面积  $S(t) = te^t$ ,  $D(t)$  绕直线  $x = t$  旋转一周所得旋转体的体积为  $V(t)$ , 求  $V(t)$  的表达式.

**解** 用微元法求  $V(t)$ .

任取  $[x, x+dx] \subset [0, t]$ , 如图 3-26 所示, 则  $dV = 2\pi(t-x)f(x)dx$ .

由于  $V(t) = \int_0^t 2\pi(t-x)f(x)dx$ ,

$$\begin{aligned} V'(t) &= 2\pi \left[ t \int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx \right]' \\ &= 2\pi \left[ \int_0^t f(x)dx + tf(t) - tf(t) \right] \\ &= 2\pi \int_0^t f(x)dx = 2\pi S(t) = 2\pi te^t, \end{aligned}$$



故  $V(t) = 2\pi \int te^t dt = 2\pi(t-1)e^t + C$ .

又由  $V(0) = 0$ , 得  $C = 2\pi$ , 由此可知  $V(t) = 2\pi(t-1)e^t + 2\pi$ .

## 22. (本题满分 12 分)

设曲线  $L: y = \tan x^2 \left(0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ .

(1) 求由  $y = 1$  与曲线  $L$  以及  $y$  轴围成的图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V$ ;

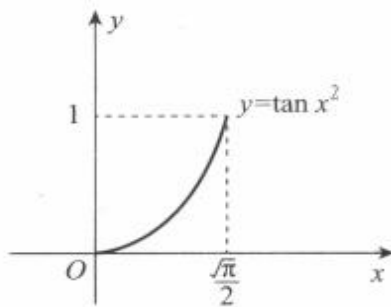
(2) 设 (1) 中旋转体内盛满水, 问将水抽完至少需要做多少功? 用  $W$  表示所做的功, 用  $\rho$  表示水的密度, 用  $g$  表示重力加速度.

**解** (1) 曲线  $L$  如图 3-25 所示. 由  $y = \tan x^2 \left(0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ , 得

$$x = \sqrt{\arctan y}, 0 \leq y \leq 1,$$

故

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2(y) dy = \pi \int_0^1 \arctan y dy \\ &= \pi y \arctan y \Big|_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \ln(1+y^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \ln 2. \end{aligned}$$



(2) 由于

$$W = \rho g \pi \int_0^1 (1-y) \arctan y dy = \pi \rho g \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 y \arctan y dy \right),$$

且

$$\begin{aligned} \int_0^1 y \arctan y dy &= \frac{y^2}{2} \arctan y \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2} dy \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+y^2} \right) dy \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (y - \arctan y) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故  $W = \frac{\pi \rho g}{2} (1 - \ln 2)$ .

